4 Soustavy lineárních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat soustavami lineárních rovnic, to znamená několika lineárními rovnicemi, které musí být současně splněny.

4.1 Základní pojmy

Definice
Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1}$$

kde a_{ij}, b_i pro $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná čísla. Hledáme n-tici čísel (reálných nebo komplexních) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ takovou, že po dosazení v_i za x_i do 1 dostaneme identity. ■

Označujeme-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

pak (1) lze zapsat ve tvaru

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{2}$$

Matice $\mathbb{A}$ se nazývá *matice soustavy* (1), matice $\mathbf{b}$ se nazývá *sloupec pravých stran* a matice $\mathbf{x}$ se nazývá *matice neznámých.* Matice $\mathbb{A}$ a $\mathbf{b}$ zapisujeme také společně jako jednu matici, označujeme ji $\mathbb{A}|\mathbf{b}$, v níž poslední sloupec tvoří sloupec pravých stran a při jejím zápisu pomocí prvků oddělujeme poslední sloupec svislou čarou, tj.

$$\mathbb{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Matice $\mathbb{A}|\mathbf{b}$ se nazývá *rozšířená matice soustavy.* Je-li matice pravých stran $\mathbf{b}$ nulová, nazývá se taková soustava *homogenní*, je-li alespoň jedno z čísel $b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ nenulové, mluvíme o *nehomogenní soustavě.*

Pojem řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

Na soustavě dvou rovnic se dvěma neznámými x, y

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \ , \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

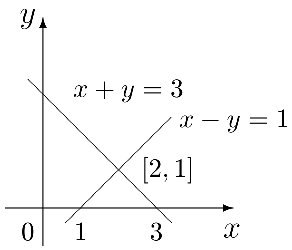
si ukážeme tři možnosti pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic.

(a) *Soustava má jediné řešení.* Například soustava

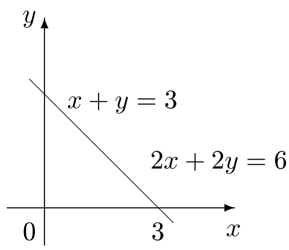
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

má jediné řešení $\mathbf{x} = (2,1)^T$. Vidíme, že $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, tj. matice soustavy je regulární.

Jestliže x a y považujeme za souřadnice bodu v rovině, pak každá rovnice soustavy vyjadřuje přímku v rovině. Dvojice v_1, v_2 je řešením soustavy, právě když bod $[v_1, v_2]$ leží na obou přímkách.



Obrázek 1:



Obrázek 2:

V našem případě mají obě přímky společný bod $[2,1]$ - viz obr. 1.

(b) *Soustava má nekonečně mnoho řešení.* Například soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

obsahuje dvě rovnice, z nichž druhá je dvojnásobkem první. Druhá rovnice tedy nedává žádnou novou informaci o dvojici neznámých x, y, a proto ji můžeme vynechat. Tím se soustava redukuje na jednu rovnici se dvěma neznámými. Jejím řešením je nekonečně mnoho dvojic, pro něž platí

$$y = 3 - x,$$

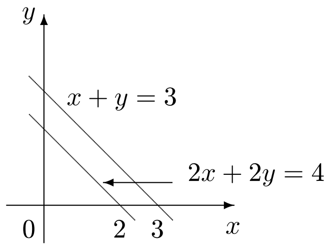
např. $(1,2)^T,\ (2,1)^T,\ (-1,4)^T$ atd. Vidíme, že $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$, tj. matice soustavy je singulární.

Geometricky vyjadřují obě rovnice tutéž přímku (viz obr. 2).

(c) *Soustava nemá řešení.* Například soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

nemá řešení, neboť levá strana 2. rovnice je dvojnásobek levé strany 1. rovnice, pro pravé strany však uvedený vztah neplatí. Vidíme, že $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$. Geometricky



Obrázek 3:

vyjadřují obě rovnice dvě různé rovnoběžné přímky (nemají společný bod) – viz obr.3.

Poznámka
Řešit soustavu znamená najít všechna její řešení, popř. zjistit, že je neřešitelná. Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, "řešit soustavu" znamená uvést předpis, podle něhož lze vyjádřit jednotlivé neznámé. V předchozím příkladě (b) lze tento předpis uvést ve tvaru

$$x = t, \quad y = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geometricky řečeno, zapsali jsme přímku $x + y = 3$ v parametrickém tvaru.

4.2 Metody řešení soustav lineárních rovnic

4.2.1 Elementární úpravy matice

Mějme dánu soustavu lineárních rovnic tvaru (1) s maticí soustavy $\mathbb{A} = (a_{ij})$ typu (m, n). *Elementárními úpravami* matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět kteroukoli z následujících úprav:

- přehození i-tého a j-tého řádku;
- vynásobení i-tého řádku nenulovým číslem;
- přičtení k-násobku i-tého řádku k j-tému řádku.

Elementárními úpravami matice $\mathbb{A}$ vznikne matice $\mathbb{B}$. O maticích $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ říkáme, že jsou *ekvivalentní*. Značíme $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$.

Lze dokázat, že elementárními úpravami matice soustavy získáme soustavu rovnic, která má stejné řešení. Elementární úpravy aplikované na matici soustavy jsou tedy takové úpravy, které nemění řešení soustavy.

Poznámka

Někdy se za elementární úpravy považuje i vyškrtnutí nulového řádku. Tato úprava však mění typ matice, a proto ji za elementární úpravu nebudeme považovat.

■

Další pojem, který zavedeme je "matice ve stupňovitém tvaru". Řekneme, že matice $\mathbb{A}$ je ve *stupňovitém tvaru*, jestliže platí:

Je-li v některém řádku prvek na i-tém místě první nenulový, potom ve všech dalších řádcích jsou všechny prvky až do i-tého včetně rovny nule.

4.2.2 Gaussova eliminační metoda

Proces Gaussovy eliminace budeme při řešení soustavy lineárních rovnic realizovat na prvky rozšířené matice soustavy. Uvedeme paralelně dva způsoby vylučování neznámých, jednak přímo v soustavě, jednak s prvky rozšířené matice soustavy. Cílem úprav je převést rozšířenou matici soustavy do stupňovitého tvaru.

Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & \text{-7} \end{array}\right).$$

1. krok Ze všech rovnic, kromě první, vyloučíme neznámou x_1. U rozšířené matice soustavy to znamená, že chceme, aby v pozicích $(2,1)$ a $(3,1)$ byly nulové prvky. První řádek opíšeme a postupně jej násobíme číslem -2 a přičteme ke druhému řádku, číslem -1 a přičteme ke třetímu řádku.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ & -5x_2 & -x_3 & = & -8 \\ & -2x_2 & +4x_3 & = & -12 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \end{array}\right).$$

2. krok Vyloučíme x_2 ze třetí rovnice. U rozšířené matice soustavy násobíme druhý řádek číslem $-\frac{2}{5}$ a přičteme ke třetímu řádku. Tím dostaneme v pozici $(3,2)$ nulový prvek.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ & -5x_2 & -x_3 & = & -8 \\ & & \frac{22}{5}x_3 & = & -\frac{44}{5} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & -\frac{44}{5} \end{array}\right). \tag{3}$$

Rozšířená matice soustavy (3) je již ve stupňovitém tvaru. Proces Gaussovy eliminace je u konce. Soustavu (3) již snadno vyřešíme zpětným dosazením:

$$\begin{array}{rcl} \frac{22}{5}x_3 = -\frac{44}{5} & \Rightarrow & x_3 = -2 \\ -5x_2 - x_3 = -8 & \Rightarrow & x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 & \Rightarrow & x_1 = 1\ . \end{array}$$

Řešením je trojice čísel $(1, 2, -2)^T$. O správnosti řešení se můžeme přesvědčit dosazením trojice do dané soustavy.

■

Dalšími dvěma příklady budeme ilustrovat použití Gaussovy eliminace pro případ soustavy, která má nekonečně mnoho řešení, a pro případ neřešitelné soustavy.

Příklad
Řešme soustavu

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = & 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & -3. \end{array}$$

V tomto příkladě již budeme vylučovat neznámé Gaussovou eliminací pouze v rozšířené matici soustavy.

Rozšířenou matici soustavy

$$\mathbb{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

převedeme Gaussovou eliminací na matici

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Rozšířená matice soustavy má po eliminaci jeden řádek nulový a ten odpovídá rovnici $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$, která je splněna identicky, tj. platí pro libovolnou čtveřici čísel, a proto ji můžeme vynechat. Ekvivalentní soustava vzniklá po eliminaci má tedy tvar

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ & & x_3 & -2x_4 & = & 6. \end{array} \tag{4}$$

Chceme zjistit výsledný tvar řešení. Převedeme soustavu (4) na tvar

$$\begin{array}{rrrcrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 4 & +4x_4, \\ & x_2 & -\,x_3 & = & -3 & -\,x_4, \\ & & x_3 & = & 6 & +2x_4. \end{array}$$

Jestliže do této soustavy dosadíme $x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}$, dostaneme soustavu, kterou již umíme řešit zpětným dosazením.

Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 3 + t, \quad x_3 = 6 + 2t, \quad x_4 = t, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

např. $[-8, 4, 8, 1]$, $[-8, 3, 6, 0]$, apod.

■

Příklad
Řešme soustavu

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 10 \end{array}$$

Rozšířenou matici soustavy

$$\mathbb{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & \text{-1} & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

upravíme eliminací na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Ekvivalentní soustava vzniklá po eliminaci má tedy tvar

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ & 3x_2 & +7x_3 & = & 5 \\ & & 0 \cdot x_3 & = & 3. \end{array}$$

Neexistuje x_3 takové, aby byla splněna poslední rovnice vzniklé soustavy. Daná soustava je tudíž také neřešitelná.

■

4.2.3 Podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

Při realizaci Gaussovy eliminace lze zároveň rozhodnout o řešitelnosti a jednoznačnosti řešení soustavy. Pomocí matice a rozšířené matice soustavy můžeme vyslovit obecné podmínky řešitelnosti a jednoznačnosti řešení.

Každé matici $\mathbb{A}$ přiřadíme celé nezáporné číslo $h(\mathbb{A})$, které nazýváme *hodnost matice* a definujeme jako počet nenulových řádků v matici, kterou dostaneme převedením matice $\mathbb{A}$ do stupňovitého tvaru.

Vraťme se nyní k příkladům z předcházejícího odstavce a zkusme formulovat podmínky řešitelnosti uvedených soustav pomocí hodnosti matice soustavy a hodnosti matice rozšířené.

Příklad

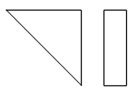
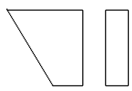
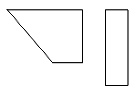
1. V příkladě 3.2, kde soustava měla jediné řešení, vznikla po eliminaci rozšířená matice ve tvaru
$$\mathbb{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & -\frac{44}{5} \end{array}\right).$$
Matice soustavy i rozšířená matice mají 3 nenulové řádky, a proto mají obě hodnost 3, tj.
$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\mathbf{b}) = 3.$$

2. V příkladě 3.3, kde soustava měla nekonečně mnoho řešení, vznikla po eliminaci rozšířená matice ve tvaru
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Zde je
$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\mathbf{b}) = 3.$$
Připomeňme, že šlo o soustavu, která má čtyři neznámé.

3. V příkladě 3.4, kde soustava neměla řešení, vznikla po eliminaci rozšířená matice ve tvaru
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$
V tomto případě je
$$h(\mathbb{A}) = 2, \quad h(\mathbb{A}|\mathbf{b}) = 3.$$

■

V uvedených příkladech je zajímavé si všimnout vztahu mezi hodností matice soustavy a hodností matice rozšířené. U řešitelné soustavy (případ 1. a 2.) platí $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\mathbf{b})$, u neřešitelné (případ 3.) je $h(\mathbb{A}) \neq h(\mathbb{A}|\mathbf{b})$. Tyto vlastnosti platí obecně a lze je shrnout do následující tabulky (n v tabulce značí počet neznámých dané soustavy lineárních rovnic).

Tvar soustavy			
Podmínky	$h(\mathbb{A}) =$ $= h(\mathbb{A}|\mathbf{b}) = n$	$h(\mathbb{A}) =$ $= h(\mathbb{A}|\mathbf{b}) < n$	$h(\mathbb{A}) < h(\mathbb{A}|\mathbf{b})$
Řešitelnost	Existuje jediné řešení	Existuje nekonečně mnoho řešení	Neexistuje řešení

Tab. 1

4.2.4 Cramerovo pravidlo

Příklad
Pro ilustraci Cramerova pravidla vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Vynásobíme první rovnici číslem a_{22}, druhou rovnici číslem $-a_{12}$ a obě rovnice sečteme. Vyloučíme tak proměnnou x_2 a dostaneme jednu rovnici pro neznámou x_1

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \ .$$

Je-li

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \ ,$$

pak

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \ .$$

Obdobně dostaneme (vyloučením proměnné x_1)

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \ .$$

Vzorce pro x_1 a x_2 můžeme přepsat pomocí determinantů na tvar

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \ , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \ .$$

■

Uvedené vzorce jsou speciálním případem tzv. *Cramerova pravidla.*

Uvažujme soustavu n rovnic o n neznámých $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (matice soustavy $\mathbb{A}$ je **čtvercová**) s regulární maticí soustavy $\mathbb{A}$ (tj. $\det \mathbb{A} \neq 0$). Potom řešení soustavy můžeme vyjádřit pomocí determinantů ve tvaru

$$x_1 = \frac{\det \mathbb{A}_1}{\det \mathbb{A}} \ , \quad x_2 = \frac{\det \mathbb{A}_2}{\det \mathbb{A}} \ , \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det \mathbb{A}_n}{\det \mathbb{A}} \ , \tag{5}$$

kde $\mathbb{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, je matice, která vznikne z matice $\mathbb{A}$ nahrazením jejího k-tého sloupce sloupcem pravých stran. Vzorce (5) se nazývají *Cramerovo pravidlo.*

Ve srovnání s ostatními metodami řešení soustav lineárních rovnic (v numerické matematice) je Cramerovo pravidlo pro $n > 3$ mnohem pracnější a časově náročnější.

Příklad
Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu

$$\begin{array}{rrrl} 4x_1 & +x_2 & -x_3 = & 2, \\ & -x_2 & +x_3 = & -10, \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 = & 24. \end{array}$$

Matice soustavy je čtvercová a

$$\det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

proto můžeme Cramerovo pravidlo použít. Vypočteme tedy postupně determinanty $\det \mathbb{A}_1$, $\det \mathbb{A}_2$, a $\det \mathbb{A}_3$.

$$\det \mathbb{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -10 & -1 & 1 \\ 24 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \ , \qquad \det \mathbb{A}_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & 1 \\ 2 & 24 & -2 \end{vmatrix} = -32 \ ,$$

$$\det \mathbb{A}_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \\ 2 & 3 & 24 \end{vmatrix} = 8 \ .$$

Podle (5) je tedy

$$x_1 = \frac{8}{-4} = -2, \qquad x_2 = \frac{-32}{-4} = 8 \qquad x_3 = \frac{8}{-4} = -2.$$

■

Poznámka
Ze vzorců (5) můžeme také odvodit jeden výsledek týkající se řešení homogenní soustavy s regulární maticí soustavy. U homogenní soustavy jsou $\det \mathbb{A}_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a soustava má tedy vždy jen nulové (tzv. triviální) řešení.

■

4.3 Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Budeme se zabývat soustavou lineárních algebraických rovnic $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (homogenní i nehomogenní), v níž některé z prvků a_{ij}, b_i nejsou udána jako čísla, ale jako parametry, které mohou nabývat libovolných hodnot z dané číselné množiny. Hodnost matice i rozšířené matice takové soustavy závisí obecně na hodnotách parametru, a proto na hodnotách parametru závisí i existence či neexistence řešení. U soustav s parametrem je třeba nejdříve provést rozbor a teprve pak hledat příslušná řešení soustavy, pokud existují.

Příklad
Proveďte rozbor existence řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrl} -x_1 & +px_2 & +3x_3 & = -1 \\ -2x_1 & +x_2 & +px_3 & = -3 \\ x_1 & -5x_2 & -7x_3 & = 0 \end{array} \tag{6}$$

v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ a najděte všechna její řešení.
Řešení: Nejprve zjistíme, pro které hodnoty parametru p je matice soustavy regulární. Stanovíme proto $\det \mathbb{A}$:

$$\det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} -1 & p & 3 \\ -2 & 1 & p \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = (p-2)(p-17) \ .$$

Matice $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbb{A} \neq 0$, tj. když $p \neq 2$ a $p \neq 17$. Musíme tedy vyšetřit zvlášť tři případy.

1. Pro hodnoty parametru $p \neq 2$ a $p \neq 17$ můžeme hledat řešení soustavy např. pomocí Cramerova pravidla:

$$\det \mathbb{A}_1 = \begin{vmatrix} -1 & p & 3 \\ -3 & 1 & p \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 26(2-p) \ ,$$
$$\det \mathbb{A}_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & p \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 2-p \ ,$$
$$\det \mathbb{A}_3 = \begin{vmatrix} -1 & p & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3(2-p) \ .$$

Odtud

$$x_1 = \frac{26(2-p)}{(p-2)(p-17)} = \frac{26}{17-p} \ , \quad x_2 = \frac{(2-p)}{(p-2)(p-17)} = \frac{1}{17-p} \ ,$$
$$x_3 = \frac{3(2-p)}{(p-2)(p-17)} = \frac{3}{17-p}$$

pro $p \neq 2$ a $p \neq 17$.

2. Pro hodnotu parametru $p = 2$ je $\det \mathbb{A} = 0$ a Cramerovo pravidlo tedy nelze použít. Gaussovou eliminací dostaneme, že rozšířená matice soustavy (6) má tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a soustava tedy má nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$x_1 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t, \quad x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}t, \quad x_3 = t \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

3. Pro hodnotu parametru $p = 17$ má rozšířená matice soustavy (6) tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 17 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 17 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 17 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{44} \end{array} \right) .$$

Vidíme, že hodnost matice soustavy je menší než hodnost rozšířené matice soustavy, a tedy soustava nemá řešení.

■

Příklad
Proveďte rozbor existence řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{lllll} x & +y & +2z & +2t & = 2 \\ x & +2y & +3z & +t & = 3 \\ x & & +z & +3t & = a \end{array} \tag{7}$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ a najděte všechna její řešení.
Řešení:
Tuto soustavu nelze řešit postupem z předchozího příkladu, protože matice soustavy není čtvercová. Použijeme tedy Gaussovu eliminaci. Po úpravě dostaneme rozšířenou matici soustavy ve tvaru

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right)$$

1. Pro $a = 1$ je hodnost matice soustavy stejná jako hodnost matice rozšířené a je rovna 2. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x = 1 - 3p - q, \quad y = 1 + p - q, \quad z = q, \quad t = p, \qquad p, q \in \mathbb{R} \ .$$

2. Pro $a \neq 1$ nemá soustava řešení, protože hodnost matice soustavy je 2, kdežto hodnost matice rozšířené je 3.

■

4.4 Výpočet inverzní matice

4.4.1 Výpočet inverzní matice eliminací

Na obecné regulární matici $\mathbb{A}$ třetího řádu ukážeme, že prvky inverzní matice lze určit modifikovanou Gaussovou eliminací.

Označíme prvky matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} , \quad \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Naším úkolem je najít matici $\mathbb{A}^{-1}$ takovou, aby

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = I , \tag{9}$$

kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice. Rovnost $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$ lze rozepsat pomocí tří rovností takto:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \end{gathered} \tag{10}$$

Máme tedy tři soustavy rovnic se stejnou maticí soustavy $\mathbb{A}$. O matici $\mathbb{A}$ víme, že je regulární, všechny tři soustavy mají tedy jediné řešení. Neznámé v soustavách jsou prvky inverzní matice $\mathbb{A}^{-1}$. Řešením první soustavy dostaneme prvky x_{11}, x_{21}, x_{31}, řešením druhé soustavy prvky x_{12}, x_{22}, x_{32} a řešením třetí soustavy prvky x_{13}, x_{23}, x_{33}. Použijeme-li pro řešení všech tří soustav (se stejnou maticí soustavy) Gaussovu eliminační metodu, můžeme eliminaci provádět současně tak, že vytvoříme modifikovanou rozšířenou matici soustavy ve tvaru

$$\left(\left. \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}_{(1)} \;\right|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{(2)} \right) . \tag{11}$$

Gaussovu eliminační metodu můžeme modifikovat tak, aby v rozšířené matici soustavy (11) na místě matice $\mathbb{A}$ (v (11) je toto místo označeno (1)) vznikla jednotková matice. Na místě jednotkové matice (označeno (2)) pak vznikne matice inverzní. Tato modifikace Gaussovy eliminace se nazývá **Jordanova metoda**, jejíž princip se dá charakterizovat v několika krocích:

1. Vytvoříme rozšířenou matici (11).
2. V ní eliminujeme známým postupem prvky pod diagonálou (GEM). Analogickým postupem eliminujeme i prvky nad diagonálou.
3. Dělíme řádek, pomocí něhož jsme provedli eliminaci, jeho diagonálním prvkem.

Tímto algoritmem dostaneme

a) na místě původní matice $\mathbb{A}$ matici jednotkovou,

b) na místě jednotkové matice matici inverzní $\mathbb{A}^{-1}$.

Příklad
Jordanovou metodou určete inverzní matici k matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vytvoříme rozšířenou matici

$$\mathbb{A}|\mathbb{I} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1. krok Známým postupem dostaneme v pozicích $(2,1)$ a $(3,1)$ nulové prvky.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

2. krok Stejným postupem eliminujeme prvek v pozici $(3,2)$ a dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

K dokončení úpravy druhého sloupce k prvnímu řádku přičteme druhý řádek a tím eliminujeme prvek v pozici $(1,2)$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -6 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Pomocí násobků třetího řádku eliminujeme dva prvky třetího sloupce v pozicích $(1,3)$ a $(2,3)$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 0 & 0 & 7 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 11 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) .$$

3. krok Poslední krok spočívá v převedení matice, která je na místě původní matice $\mathbb{A}$, na jednotkovou. První a třetí řádek vydělíme 4, druhý řádek -4:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) .$$

Hledaná inverzní matice má tedy tvar

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} .$$

Tím jsme vyřešili současně všechny tři soustavy rovnic (10). Správnost výsledku můžeme ověřit platností rovností $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

■

4.4.2 Výpočet inverzní matice pomocí determinantu

Věta
Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij}),\ i,j = 1,\dots,n$, je regulární matice řádu n. Pak

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{pmatrix} D_{11}, & D_{21}, & \dots, & D_{n1} \\ D_{12}, & D_{22}, & \dots, & D_{n2} \\ \dots & & & \\ D_{1n}, & D_{2n}, & \dots, & D_{nn} \end{pmatrix} , \tag{12}$$

kde D_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} (viz (**??**).

■

Důkaz
Označme $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{C} = (c_{ij})$. Ověříme, že matice $\mathbb{C}$ je jednotková. Podle definice součinu matic je

$$c_{ij} = \frac{1}{\det \mathbb{A}}(a_{i1}D_{j1} + a_{i2}D_{j2} + \dots + a_{in}D_{jn}) .$$

Je-li $i = j$, pak podle (**??**) je

$$a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in} = \det \mathbb{A} ,$$

a tedy $c_{ii} = 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Je-li $i \neq j$, pak součet

$$a_{i1}D_{j1} + a_{i2}D_{j2} + \cdots + a_{in}D_{jn}$$

představuje rozvoj determinantu (podle i-tého řádku) matice, která vznikla z matice $\mathbb{A}$ nahrazením j-tého řádkového vektoru i-tým řádkovým vektorem. Jde tedy o determinant matice, která má dva řádky stejné a to znamená, že determinant je roven nule, takže $c_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Matice $\mathbb{C}$ je tedy jednotková.

Analogicky se dokáže, že také $\mathbb{B}\mathbb{A}$ je jednotková matice.

■

Příklad
Pro matici druhého řádu

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}$$

je podle (**??**)

$$D_{11} = a_{22}, \quad D_{12} = -a_{21}, \quad D_{21} = -a_{12}, \quad D_{22} = a_{11},$$

a tedy podle (12)

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{pmatrix} a_{22}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & a_{11} \end{pmatrix} .$$

■

Poznámka
Vzorec (12) je pro praktický výpočet inverzní matice vhodný pouze u matic nejvýše třetího řádu. Pro matice čtvrtého řádu vyžaduje výpočet jednoho determinantu čtvrtého řádu a šestnácti determinantů třetího řádu.

■